

Extremalprobleme

Anleitung: Die Probleme 1a, 1b, 2, 3 und 4 sind gemäss dem Einführungsbeispiel (Stadion) zu lösen, d.h.

Skizze

Fertige eine Skizze an. Führe Variablen ein.

Zielfunktion

Stelle eine Formel für diejenige Grösse auf, die extremal werden soll.

Nebenbedingung

Anhand der Skizze und der Aufgabenstellung ist ein Zusammenhang zwischen den eingeführten Variablen zu finden. Die Nebenbedingung ist nach einer Variablen aufzulösen und in die Zielfunktion einzusetzen. Die (neue) Zielfunktion hängt jetzt nur noch von einer Variablen ab. Diese Abhängigkeit ist quadratisch.

Scheitelpunktsbestimmung

Gesucht ist das Maximum oder das Minimum der (neuen) Zielfunktion mit Hilfe des Scheitelpunktes.

Antwort

Versuche, eine möglichst genaue Antwort auf die im Problem gestellte Frage zu geben.

- 1.)
 - a) Ein 20m langer Zaun soll einen rechteckigen Garten begrenzen, der auf der einen Seite an eine Mauer grenzt. Bestimme Länge und Breite des Gartens, so dass er maximalen Flächeninhalt hat.
 - b) Es sei keine Mauer vorhanden. Wie sieht der grösstmögliche Garten nun aus ?
 - c) Mit dem Zaun wird ein kreisförmiger Garten gebildet. Welcher der drei Gärten ist am grössten ?
- 2.) Die Summe zweier positiver Zahlen beträgt 120. Wie gross kann das Produkt der beiden Zahlen höchstens werden ?
- 3.) Einem gleichseitigen Dreieck der Seitenlänge a ist ein Rechteck von möglichst grossem Flächeninhalt so einzubeschreiben, das alle 4 Ecken des Rechteckes auf Dreieckseiten liegen. Wie lang sind die Seiten dieses Rechteckes ?
 - a) $a=1m$.
 - b) allgemein.
- 4.) Ein 20m langer Zaun soll ein kissektorförmiges Blumenbeet begrenzen. Wie gross muss r gewählt werden, damit die Fläche des Beetes maximal wird ? Berechne den Kissektorradius r sowie die Fläche F und vergleiche mit der Aufgabe 1c) !

Lösungen:

- 1.)
 - a) Länge: 10m, Breite: 5m, (Fläche: 50m^2)
 - b) Länge: 5m, Breite: 5m, (Fläche: 25m^2)
 - c) Fläche (Kreis): 31.83m^2 , gewonnen...
- 2.) ZF: $P=xy$; NB: $x+y=120$; Lösung: $x=60$, $y=60$, maximales Produkt: 3600
- 3.) b) ZF: $F=lb$; NB: $b = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot (a - l)$; Lösung: $l = 0.5 \cdot a$; $b = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a$; $F = \frac{\sqrt{3}}{8} \cdot a^2$
- 4.) ZF: $F = \frac{1}{2} \cdot r \cdot b$; NB: $2r + b = 20$ Lösung: $r=5\text{m}$; $F=25\text{m}^2$