Wahrscheinlichkeitsrechnung

Aufgabe 1 Ein normaler Würfel wird geworfen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man die Zahl 5 ?

Lösung Ohne irgendwelche Kenntnisse ist hier klar, dass die Wahrscheinlichkeit für das gewünschte Ergebnis 1:6 beträgt. Wie klein diese Wahrscheinlichkeit ist, weiss jeder Eile mit Weile-Spieler, der gerne mit seinem ersten Kegel aus dem Haus möchte !

Wie kommt man auf 1:6 ? Man sieht, dass das Zufallsexperiment 6 mögliche Ergebnisse hat, nämlich die Zahlen 1,2,3,4,5 und 6. Diese 6 Zahlen haben bei ungezinktem Würfel (Laplace-Würfel) alle die gleiche Wahrscheinlichkeit gewürfelt zu werden. Also bleibt für eine bestimmte Zahl der sechste Teil.

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung befasst sich mit Zufallsexperimenten. Beispiele von Zufallsexperimenten sind:

→ Wurf eines Würfels
→ Ziehen von Spielkarten
→ Erhebung des Verkehrsaufkommens an einer Strassenkreuzung
→ Stichprobenentnahme für Qualitätskontrollen
→ Auswahl von Versuchspersonen für einen Test

Ergebnis, relative Häufigkeit

Zu jedem Zufallsexperiment gehört eine Menge Ω der möglichen Versuchsergebnisse. Bei jeder Durchführung des Zufallsexperimentes wird ein Ergebnis ω dieser Menge eintreffen. Es ist allerdings nicht vorhersehbar, welches der möglichen Ergebnisse ω eintreffen wird ! Im weiteren ist das erhaltene Ergebnis nicht reproduzierbar. Gesetzmässigkeiten zeigen sich erst bei oftmaliger Wiederholung des Experimentes: für jedes Ergebnis ω wird sich mit der Zeit eine bestimmte relative Häufigkeit abzeichnen, mit welcher dieses Ergebnis auftritt.

$$\text{relative Häufigkeit von } \omega = \frac{\text{Anzahl Versuche mit Ergebnis } \omega}{\text{Anzahl aller durchgeführten Versuche}}$$

Ergebnis: möglicher Ausgang eines Zufallsexperimentes

Die relative Häufigkeit, die sich bei sehr vielen Versuchen einstellt, ist ein Mass für die Wahrscheinlichkeit, mit der das betrachtete Ergebnis eintreten wird.

Beispiele:

1. Wurf einer Münze — Ergebnis:

   relative Häufigkeit von Kopf:
   relative Häufigkeit von Zahl:

2. Test auf Farbenblindheit — Ergebnis: bei 100 Testpersonen sind 3 farbenblind.

   relative Häufigkeit von farbenblind:
   relative Häufigkeit von nicht farbenblind:

Ereignisse und ihre Wahrscheinlichkeit

Bei Zufallsexperimenten interessiert man sich meistens nicht für ein bestimmtes Versuchs**ergebnis** $\omega \in \Omega$, sondern für das Eintreten eines bestimmten **Ereignisses.** Der Unterschied zu einem Ergebnis soll anhand eines Wurfs mit zwei Würfeln klar gemacht werden.

Beispiel: Beim Wurf mit zwei Würfeln interessiert man sich für das **Ereignis** " Augenzahl des roten Würfels ist grösser als die Augenzahl des blauen Würfels". Man erkennt sofort, dass dieses Ereignis (wir nennen es A) aus bestimmten Ergebnissen zusammengesetzt wird.

Bildliche Darstellung:

Jedes Feld stellt ein bestimmtes Versuchs**ergebnis** dar. Das gewünschte **Ereignis** wird jedoch durch mehrere Felder dargestellt.

Aufgabe 2 Schraffiere alle Felder, die das gewünschte Ereignis A darstellen !

Aus der bildlichen Darstellung entnehmen wir: Das gewünschte Ereignis A ist eine Teilmenge von Ω. Bei der Durchführung des Zufallsexperimentes wird sich ein bestimmtes Ergebnis ω ergeben, und es wird entweder $\omega \in A$ (Ereignis tritt ein) oder $\omega \notin A$ (Ereignis tritt nicht ein) gelten.

rot						
6						
5						
4						
3						
2						
1						
	1	2	3	4	5	6 blau

Wahrscheinlichkeit P(A) für das Ereignis A

Jedes Ergebnis erscheint mit der gleichen Wahrscheinlichkeit. Die relative Häufigkeit bei 3600 Versuchen wäre also 100/3600 = 1/36. Das Ereignis A setzt sich aus 15 günstigen Ergebnissen zusammen. Es ist beinahe zwingend, dass man für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A nun die Wahrscheinlichkeit P(A) = 15/36 bekommt.

Dies führt nun zur einfachsten Definition der Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses A: Man zählt alle **günstigen** Ergebnisse des Zufallsexperimentes (günstig heisst: Ereignis A tritt ein) und dividiert sie durch alle **möglichen** Ergebnisse des Zufallsexperimentes. Man erhält für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A:

$$\boxed{P(A) = \frac{\textit{günstige Fälle}}{\textit{mögliche Fälle}}}$$

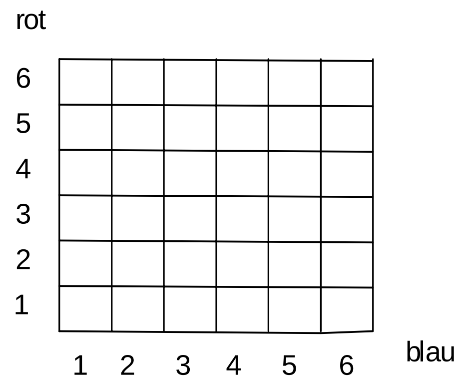
Einschränkung für diese Berechnungsart:

Beispiel: Wir nehmen an, wir hätten einen nach aussen normalen Spielwürfel. Er enthält aber an einigen Stellen Blei, damit die Zahl 6 öfter erscheint als die anderen Zahlen. Damit gilt die obige Formel nicht mehr.

Oder positv ausgedrückt: Die obige Formel gilt nur, wenn die Wahrscheinlichkeiten für die möglichen Ergebnisse gleich sind.

Die Aufgaben 3 bis 9 sind folgendermassen zu lösen: Zähle die möglichen und die günstigen Fälle und benütze die Definition der vorangehenden Seite um die geforderten Wahrscheinlichkeiten zu bestimmen !

Aufgabe 3 Wurf mit zwei Würfeln: Trage im nebenstehenden Diagramm das Ereignis A = "Punktsumme mindestens 9" ein und bestimme P(A) !



Aufgabe 4 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Werfen mit zwei Würfeln

a) gleichzeitig 3 und 5
b) gleichzeitig 3 und 3
c) gleichzeitig irgendeinen Pasch (d.h. zwei gleiche Punktzahlen)
d) weder 3 noch 5
e) die Punktsumme 8 zu werfen ?

Aufgabe 5 In einem Behälter befinden sich 10 schwarze, 6 weisse und 4 rote Kugeln. Ich ziehe eine Kugel heraus. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es

a) eine schwarze
b) eine weisse
c) keine schwarze
d) keine weisse Kugel ist ?

Aufgabe 6 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim Herausziehen von zwei Karten aus einem Spiel mit 36 Karten

a) eine rote und eine schwarze Karte (in dieser Reihenfolge)
b) zwei schwarze Karten
c) zwei Schaufeln
d) zwei Bilder
e) kein Bild zu bekommen ?

Aufgabe 7 Ein Geldstück mit 3.1 cm Durchmesser wird auf ein Schachbrett, dessen Quadratseiten 5.5 cm messen, fallengelassen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es ganz ins Innere eines Quadrates fällt ?

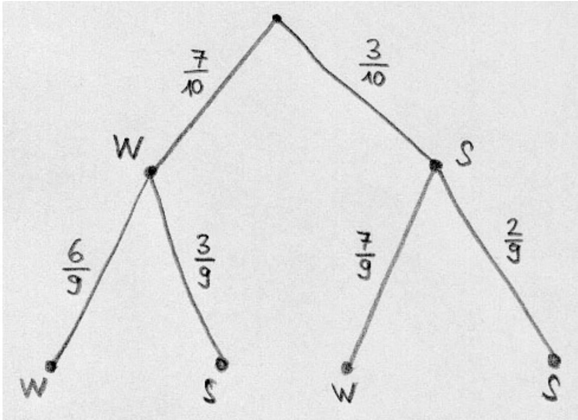
Aufgabe 8 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in einem Wurf mit 5 Würfeln

a) genau vier
b) genau drei
c) genau zwei gleiche Augenzahlen zu werfen ?
d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Augenzahlen verschieden sind ?

Aufgabe 9 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, beim dreimaligen Werfen eines Würfels hintereinander die Augenzahlen 1,2,3 zu bekommen ?

Mehrstufige Versuche

Wenn ein Zufallsexperiment aus mehreren Versuchsstufen besteht, ist es oft nützlich, die Möglichkeiten für den Ablauf des Experiments in einem Baumdiagramm zu veranschaulichen. Die nebenstehende Figur zeigt das Diagramm zu folgendem Versuch: **Aus einer Urne mit 7 weissen und 3 schwarzen Kugeln wird zweimal hintereinander eine Kugel gezogen, ohne die gezogene wieder zurückzulegen.** Es gibt vier mögliche Versuchsergebnisse: ww, ws, sw, ss . Jedem Versuchsergebnis entspricht ein Pfad im Baumdiagramm, welcher aus zwei Strecken besteht. Die Strecken sind mit den Wahrscheinlichkeiten für das Ziehen der einzelnen Kugeln in den beiden Versuchsstufen belegt.



Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades erhält man durch multiplizieren der Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades. Denn wenn man den Versuch oft, zB. 1000mal wiederholt, so wird in ca. $\frac{7}{10} \cdot 1000 = 700$ Fällen der Weg nach **w** eingeschlagen und in ca. 1/3 von diesen 700 Fällen wird es von w nach **s** weitergehen. Die relative Häufigkeit für das Ergebnis **ws** beträgt also ungefähr $\frac{1}{3} \cdot \frac{7}{10}$; entsprechend setzen wir P(ws) = $\frac{7}{30}$

Die folgende Tabelle zeigt die Wahrscheinlichkeiten für alle vier Ergebnisse.

ω	ww	ws	sw	ss
$p(\omega)$	7/15	7/30	7/30	1/15

Allgemein legen wir fest:

Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades ist gleich dem Produkt aller Wahrscheinlichkeiten längs des Pfades.

Aufgabe 10 Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit einem Würfel
a) zweimal nacheinander
b) dreimal nacheinander
c) n-mal nacheinander die gleiche Punktzahl zu werfen ?

Aufgabe 11 Ein Geldstück wird zweimal aufgeworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit
a) genau einmal Kopf
b) zweimal Kopf
c) mindestens einmal Kopf zu werfen ?

Aufgabe 12 Damit ein zu bauender Apparat richtig funktioniert, müssen vier verschiedene einwandfreie Teilstücke A,B,C,D richtig zusammen gebaut werden. Für jedes der vier Teilstücke bestehe die Wahrscheinlichkeit 2%, nicht einwandfrei zu sein; in 1% aller Fälle werden die vier Teilstücke nicht richtig zusammengebaut. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein so gebauter Apparat bei der ersten Kontrolle richtig funktioniert ?

Aufgabe 13 Aus einem Kartenspiel mit 36 Karten wird zunächst eine Karte gezogen. Diese wird nicht zurückgelegt; dann wird eine zweite Karte aus dem Spiel gezogen. Welches ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Karten Asse sind ?

Aufgabe 14 Aus einem Behälter mit 10 weiseen, 5 schwarzen und 5 roten Kugeln werden gleichzeitig zwei Kugeln gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine schwarze, aber keine rote Kugel dabei ist ?

Aufgabe 15 in einer Urne sind 12 weisse und 8 schwarze Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, unter 6 Kugeln, die man gleichzeitig herausnimmt, 4 weisse und 2 schwarze zu bekommen ?

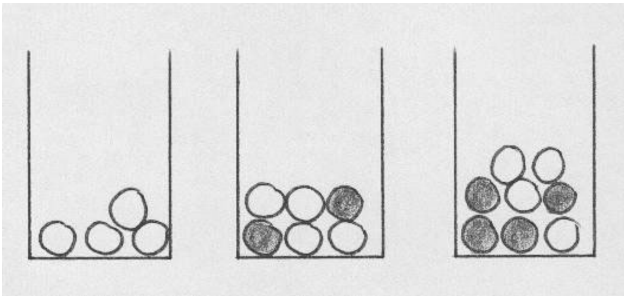
Aufgabe 16 Bei der Fabrikation eines gewissen Artikels hat sich gezeigt, dass im Durchschnitt von 100 hergestellten Exemplaren 95 brauchbar sind. 80 % der brauchbaren Exemplare sind von erster Qualität. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein hergestellter Artikel von erster Qualität ist ?

Aufgabe 17 Beim Sporttoto sind die Ergebnisse von 13 Spielen vorauszusagen. Für jedes Spiel gibt es drei Möglichkeiten: Sieg des Heimclubs, Sieg des Gastclubs, Unentschieden. Angenommen, der Totozettel werde auf gut Glück ausgefüllt. Welche Wahrscheinlichkeit besteht dann,

a) alle Spiele
b) genau 12 Spiele
c) genau 11 Spiele
d) genau n Spiele richtig vorauszusagen ?

Aufgabe 18 **Höchststrafe in Zelophanien** (siehe Atlas):

Wer in Zelophanien zur Höchststrafe verurteilt wird, erhält eine letzte Chance: Mit verbundenen Augen darf er eine der 3 Urnen (s. Skizze) wählen und anschliessend aus der gewählten Urne **eine** Kugel ziehen. Eine weisse Kugel rettet ihn vor der beschriebenen Höchststrafe.



a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, der Strafe zu entgehen ?
b) der Verurteilte erhält die Erlaubnis, vorher die Kugeln in den Urnen anders zu verteilen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei **optimaler** Verteilung, der Strafe zu entgehen ?

Aufgabe 19 **Das Wetter in Zelophanien:**

Es gibt nur trockene und nasse Tage. Das Verhältnis der trockenen zu den nassen Tagen ist wie 1:12 . Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es am 1.,2, und 3, Juli nass ist ?

Aufgabe 20 **Verbessertes Wettermodell:**

Wenn es heute trocken ist, dann ist es morgen mit der Wahrscheinlichkeit 0.2 nass. Wenn es heute nass ist, dann ist es morgen mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 trocken. Es ist heute trocken.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es Uebermorgen nass ist ?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es in drei Tagen trocken ist ?

Aufgabe 21 Kain und Abel spielen das folgende Spiel: Gegeben sind vier verschiedenfarbige Würfel**,** deren Seiten die folgenden Punktzahlen tragen:

roter Würfel:	viermal 4 Punkte, zweimal 0 Punkte
blauer Würfel:	viermal 2 Punkte, zweimal 6 Punkte
weisser Würfel:	dreimal 1 Punkt, dreimal 5 Punkte
grüner Würfel:	sechsmal 3 Punkte

Kain darf sich zuerst einen Würfel aussuchen, anschliessend wählt Abel einen der drei übrigen Würfel. Jeder wirft seinen Würfel; wer die höhere Punktzahl hat, gewinnt. Wie gross sind die Gewinnchancen von Kain bei optimalem Verhalten beider Spieler ?

Aufgabe 22 Ein Würfel wird dreimal geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal die 6 zu würfeln ?

Aufgabe 23 Das erste Problem des Chevalier de Méré (Literat am Hof von Louis XIV, in einem Brief von 1654 an Blaise Pascal formuliert):
Was ist wahrscheinlicher: bei vier Würfen mit einem Würfel mindestens eine 6 oder bei 24 Würfen mit zwei Würfeln wenigstens eine Doppelsechs zu erhalten ?

Aufgabe 24 An einer belebten Strassenkreuzung wird ein Fussgänger mit der Wahrscheinlichkeit 0.01 von einem Auto angefahren. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fussgänger während 70 Tagen unverletzt bleibt, wenn er die Kreuzung zweimal täglich überqueren muss ?

Aufgabe 25 Bei einer Maus beträgt die Wahrscheinlichkeit für die Mutation eines Gens bei einer Strahlendosis von einem Röntgen $2.5\ 10^{-7}$. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10'000 Genen mindestens eine Mutation vorkommt ?

Aufgabe 26 Wie oft muss man einen Würfel werfen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal eine 6 zu werfen, grösser als 90% wird?

Geburtstagsprobleme (27-29)

Aufgabe 27 a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass jemand am 10. Juli Geburtstag hat ?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen am gleichen Tag Geburtstag haben ?

Aufgabe 28 a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 7 befragten Personen mindestens 2 am gleichen Wochentag Geburtstag haben ?
b) Gleiche Aufgabenstellung wie a) für 6, 5, 4, 3 und 2 Personen !
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 7 Personen (darunter ich) mindestens jemand mit mir am gleichen Wochentag Geburtstag hat ?

Aufgabe 29 a) In einer Gesellschaft von 35 Personen wird Dir folgende Wette angeboten: "Wetten, dass sich unter uns mindestens 2 Personen befinden, die am selben Tag Geburtstag haben." Nimmst Du diese Wette an ?
b) Wieviele Personen müssen anwesend sein, sodass die Gewinnchance der Wette über 50% ist ?
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei 35 Personen (darunter ich) jemand mit mir am gleichen Tag Geburtstag hat ?
d) Wieviele Personen müssen anwesend sein, sodass die bei c) berechnete Wahrscheinlichkeit grösser als 50 % ist ?

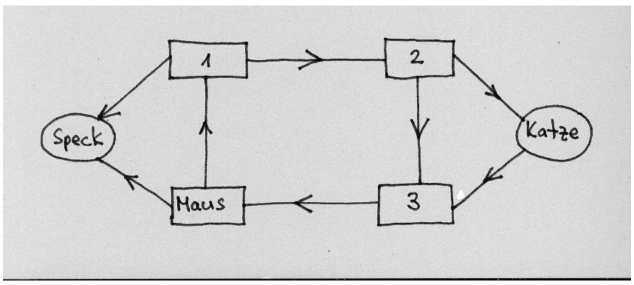
Aufgabe 30 Das zweite Problem des Chevalier de Méré: (s. Aufgabe 24):
Eine Münze wird wiederholt geworfen. Für Kopf erhält A einen Punkt und für Zahl erhält B einen Punkt. Wer zuerst 5 Punkte erzielt hat, gewinnt den Einsatz von 84 Franken. Nach 7 Würfen hat A vier Punkte und B drei Punkte. Das Spiel wird abgebrochen. Welches ist die "gerechte" Aufteilung des Einsatzes ?

Probleme, die z.T. auf unendliche geometrische Reihen führen

Aufgabe 31 Eine Münze wird so oft geworfen, bis zum ersten Mal Kopf kommt.
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nie Kopf kommt ?
b) Bestimme die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl Würfe bis zum ersten Auftreten von Kopf ungerade ist ?

Aufgabe 32 Drei Personen A, B, C werfen einen Würfel in der Reihenfolge A, B, C, A, B, C, ... Wer zum ersten Mal eine 6 wirft, gewinnt. Berechne die Gewinnchancen der drei Spieler.

Aufgabe 33 Eine Maus befindet sich im Höhlensystem der untenstehendenFigur. Bei jeder Verzweigung entscheidet sie zufällig, durch welchen Gang sie weiterläuft. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit,
a) dass sie sich am Speck gütlich tun kann ?
b) dass sie bei der Katze landet ?



Aufgabe 34 Kain und Abel werfen abwechslungsweise eine Münze so lange, bis hintereinander KKK oder KZK auftritt. Kain gewinnt bei KKK, Abel bei KZK. Wie gross sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten der beiden ?

Aufgabe 35 Ein Würfel wird wiederholt geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass 5 und 6 vor 1 oder 2 oder 3 erscheint ?

Aufgabe 36 Die Mutter sagt zu ihrer Tochter: Du bekommst mehr Sackgeld, wenn Du von drei Tennispartien, die Du abwechselnd gegen mich und Deinen Vater spielst, zwei hintereinander gewinnst. Die Mutter spielt besser als der Vater. Gegen wen soll die Tochter zuerst spielen und wie gross ist ihre Gewinnwahrscheinlichkeit, wenn sie mit der Wahrscheinlichkeit a bzw. b gegen die Mutter bzw. den Vater gewinnt ?

Aufgabe 37 Man wirft einen gewöhnlichen Spielwürfel (Zahlen 1,2,3,4,5,6) 4-mal hintereinander. Im ersten Wurf wirft man die Augenzahl a, im zweiten b, dann c, dann d. Mit den erhaltenen Zahlen schreibt man die Zahl a.bcd. (Lies: a Komma bcd). Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die erhaltene Zahl grösser ist als
a) $e=2.71828...$, b) $\Pi= 3.141592.....$?

Aufgabe 38 Drei Basketballspieler A,B und C treffen mit den Wahrscheinlichkeiten 0.5, 0.6 und 0.7 in den Korb. Ein vierter Spieler trifft nur mit 0.1. Dieser Spieler darf nach jedem Fehlwurf eines anderen Spielers werfen. Wer zuerst in den Korb trifft hat gewonnen. A beginnt mit werfen. Wie gross sind die Gewinnchancen der vier Spieler ?

Aufgabe 39 Zwei Spieler treffen mit Pfeilen ein Ziel mit den Wahrscheinlichkeiten 1/3 und 2/5. Sie schiessen abwechslungsweise. Das Spiel ist sofort aus, wenn einer der Spieler zweimal getroffen hat. Nach dem sechsten Schuss (insgesamt) stecken zwei Pfeile im Ziel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel nun fertig ist, wenn der schwächere Spieler begonnen hat ?

Aufgabe 40 Castor und Pollux haben je zwei Kugeln. Sie schiessen abwechselnd auf eine Glasflasche. Castor beginnt. Ihre Trefferwahrscheinlichkeiten sind 1/3 bzw. 1/4. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Castor die Flasche zerstört ?

Löse das Problem unter der Annahme, dass Castor und Pollux beliebig viele Kugeln haben.